Le calcul

Progressivité des apprentissages concernant le calcul

Les compétences en calcul se développent progressivement tout au long des 4 cycles

- Cycle 1 : Construction du nombre.

- Cycle 2 : Le calcul mental et le calcul en ligne sont utilisés dans des contextes numériques progressivement complexifiés en jouant sur différentes variables. Les signes opératoires +, -, x sont utilisés. En calcul posé, on découvre les algorithmes de calcul de l'addition, la soustraction et la multiplication lorsque le calcul mental et le calcul en ligne ont montré leurs limites en termes d'efficacité.

- Cycle 3 : La complexification des contextes numériques en calcul mental et en calcul en ligne se poursuit. La nature des nombres (nombres premiers/décimaux) et leurs différentes écritures (fraction décimale, décompositions, écriture à virgule) sont abordés. En calcul posé, les algorithmes des 4 opérations sont travaillés avec des nombres entiers et décimaux (sauf division). Les fonctions de base de la calculatrice sont introduites pour obtenir ou vérifier un résultat.

- Cycle 4 : Le calcul mental et le calcul posé portent sur les différents types de nombres étudiés. Introduction du calcul littéral. La calculatrice est utilisée pour effectuer des calculs complexes.

Place des compétences travaillées concernant le calcul

- Chercher : l'élève s'engage dans une démarche, il questionne la situation en mobilisant des connaissances, des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, il teste plusieurs pistes, compare leur efficacité et s'engage dans l'une d'elle.

- Modéliser : l'élève utilise les mathématiques pour résoudre des problèmes concrets et justifie son choix.
- Représenter : l'élève choisit une écriture d'un nombre entier ou décimal adaptée au traitement d'un calcul, il passe d'une écriture à une autre en suivant les besoins qui apparaissent pour effectuer le calcul, il utilise une représentation pour traiter un calcul…

- Raisonner : l'élève choisit une démarche pour mettre en œuvre un calcul, vérifie ses résultats, met en cohérence le résultat d'un calcul et le contexte du problème concret, combine plusieurs étapes de calcul…

- Calculer : lors de calcul mental, en ligne, posé, voire instrumenté lorsqu'une organisation réfléchie des calculs est nécessaire pour produire ou vérifier un résultat, l'élève fait des choix pour organiser un calcul et anticipe sur l'effet de ces choix.

- Communiquer : l'élève utilise, à l'oral ou à l'écrit, le langage naturel ou des écritures symboliques pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements et présenter des calculs.

Le calcul mental
→ calcul sans recours à l'écrit utile pour contrôler un résultat et développer l'esprit critique Les habiletés développées en calcul mental sont au service du calcul en ligne. Le calcul en ligne peut aussi être vu comme une étape dans le développement du calcul mental.

Le calcul en ligne
→ calcul écrit ou partiellement écrit Donne la possibilité à chaque élève, s'il en ressent le besoin, d'écrire des étapes de calcul intermédiaires qui seraient trop lourdes à garder en mémoire (permet de libérer la MT).

Le calcul posé
→ calcul mobilisant des techniques spécifiques
• permet de disposer d'une méthode de calcul sécurisante: permet de garantir l'obtention d'un résultat ;
• donne l'occasion de réinvestir les faits numériques (tables) et les connaissances sur la numération ;

• permet l’étude du fonctionnement d’algorithmes complexes à partir de leur mise en pratique.

Le calcul instrumenté
→ calcul effectué à l’aide d’un ou plusieurs instruments, appareils ou logiciels

• permet de libérer l’esprit et de centrer la réflexion sur l’élaboration d’une démarche de résolution ;

• se révèle pertinent dans les situations de calculs répétitifs ;

• permet de vérifier des résultats obtenus à l’issue d’un calcul mental, en ligne ou posé.

L’apprentissage d’une utilisation intelligente des calculatrices est prévu dès le cycle 2 de l’école primaire. Il s’agit de l’utiliser pour des calculs relevant des 4 opérations, mais aussi d’en connaître quelques particularités. La calculatrice constitue une variable didactique décisive : elle peut être utilisée lors de l’apprentissage d’une nouvelle opération ou lors de la résolution de problèmes un peu complexes. L’initiation au tableur ne figure, quant à lui, qu’au programme du collège.

Le calcul réfléchi

→ met en oeuvre des procédés/stratégies
• sollicite les connaissances des propriétés des nombres, des opérations, de résultats connus et des techniques déjà maîtrisées.

Les 3 types de connaissances sur lesquels il repose :

- Résultats et procédures de base stockés en mémoire Les tables, les procédures de calcul comme « multiplier par 10 », les relations entre certains nombres, les procédures fréquemment mobilisées…

- Connaissances relatives à la numération écrite ou orale À l’écrit : par exemple, 27 c’est 20+7 ou 2 dizaines et 7 unités. À l’oral : par exemple, dans « trois-cent-vingt-sept », le « trois » des centaines est plus explicite qu’en numération écrite chiffrée.

- Connaissances relatives aux propriétés des opérations Elles sont souvent connues implicitement.

Les supports du calcul réfléchi :

- Traces écrites

→ Le calcul réfléchi occasionne souvent une charge mentale de travail importante qui peut être source d'erreurs. Pour l'alléger, il peut s'accompagner de traces écrites : résultats partiels, supports pour la procédure mise en œuvre…

- Calculatrice

→ Pour conduire l'élève à réfléchir sur un calcul, on peut lui proposer des activités dans lesquelles un calcul ne peut pas être tapé directement sur la machine. Bien que assisté par une machine, le calcul nécessite alors un raisonnement et l'élaboration d'une procédure spécifique

Le calcul approché

→ type de calcul réfléchi qui exige les mêmes compétences, auxquelles il faut en ajouter d'autres

- déterminer l'ordre de grandeur recherche, souvent en fonction du contexte de la situation dans laquelle le calcul est conduit.
- déterminer, en conséquence, les arrondis choisis pour les nombres en jeu, en fonction de l'ordre de grandeurs recherché et des possibilités de calcul mental.

L'addition

Associativité	Commutativité	Élément neutre	Distributivité
Propriété qui permet de « déplacer » des parenthèses et finalement de les supprimer.	Propriété qui permet de « permuter » deux termes.	C'est le nombre 0.	Permet de faciliter les calculs.
a+(b+c)=(a+b)+c On peut donc écrire : a+b+c	a+b=b+a	a+0=0+a=a	ax(b+c)=(axb)+(axc) ou ax(b+c)=ab+ac

Le résultat d'une addition s'appelle une *somme* et les nombres que l'on additionne entre eux sont les *termes de la somme*.

La soustraction

Conservation de la différence	Ajout d'une différence	Soustraction d'une somme	Soustraction d'une différence
La valeur d'une différence n'est pas modifiée si on ajoute ou soustrait le même nombre à chacun de ses termes.			
Avec a ≥ b a-b=(a+c)-(b+c) Avec a ≥ b ≥ c a-b=(a-c)-(b-c)	Avec b ≥ c a+(b-c)=(a+b)-c	Avec a ≥ b+c a-(b+c)=(a-b)-c	Avec a ≥ b ≥ c a-(b-c)=(a-b)+c

N'est pas associative et pas commutative

Le résultat d'une soustraction s'appelle une *différence* et les nombres que l'on soustrait entre eux sont les *termes de la différence*.

Amorcées dès l'école maternelle, les compétences concernant l'addition et la soustraction sur les nombres entiers naturels se construisent principalement entre le CP et le CE2.

Elles sont ensuite étendues aux nombres décimaux en fin de cycle 3 (CM1 et CM2). Ces compétences sont de 2 types :

- être capable de résoudre des problèmes relevant de ces deux opérations, d'abord par des procédures personnelles (c'est-à-dire élaborées par l'élève pour chaque problème, notamment lorsqu'il ne reconnaît pas directement le calcul adéquat à réaliser ou qu'il ne l'a pas encore appris : recours à des dessins ou schémas, utilisation du comptage…) puis en utilisant les procédures expertes (à partir de la reconnaissance que tel problème relève de telle opération) ;

- être capable de produire le résultat de tout calcul additif ou soustractif, en choisissant la méthode la plus appropriée compte tenu des nombres en jeu et des outils disponibles (calcul réfléchi, utilisation d'un algorithme, utilisation d'une calculatrice…).

Typologie des problèmes d'addition et de soustraction - VERGNAUD

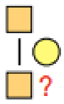
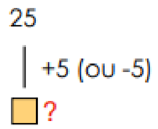
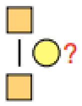
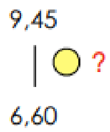
COMPOSITION DE DEUX ÉTATS

Exemples de problèmes		
$\left.\begin{matrix}\square\\\square\end{matrix}\right\}\ \square ?$ **Recherche du composé**	Dans un bouquet, il y a 8 roses et 7 iris. Combien y a-t-il de fleurs ?	$\left.\begin{matrix}8\\7\end{matrix}\right\}\ \square ?$
$\left.\begin{matrix}\square ?\\\square\end{matrix}\right\}\ \square$ **Recherche d'une partie**	Dans un bouquet de 15 fleurs composé de roses et d'iris, il y a 8 roses. Combien y a-t-il d'iris ? Un pot rempli de liquide pèse 2,450kg. Vide, il pèse 0,585kg. Quelle est la masse du liquide qu'il contient ?	$\left.\begin{matrix}8\\\square ?\end{matrix}\right\}\ 15$ $\left.\begin{matrix}0{,}585\\\square ?\end{matrix}\right\}\ 2{,}450$

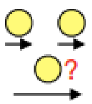
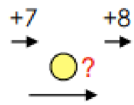
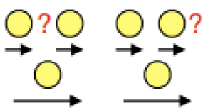
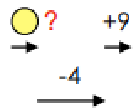
TRANSFORMATION D'UN ÉTAT

Exemples de problèmes		
$\square \xrightarrow{\bigcirc} \square ?$ **Recherche de l'état final**	Jacques avait 17 billes. Il en a gagné 5. Combien en a-t-il maintenant ?	$17 \xrightarrow{+5} \square ?$
$\square ? \xrightarrow{\bigcirc} \square$ **Recherche de l'état initial**	Jacques a gagné 5 billes. Il en a maintenant 22. Combien en avait-il avant la partie ?	$\square ? \xrightarrow{+5} 22$
$\square \xrightarrow{\bigcirc ?} \square$ **Recherche de la transformation**	Jacques avait 17 billes avant de jouer cette partie. Il en a 22 à la fin de la partie. Combien en a-t-il gagné ?	$17 \xrightarrow{\bigcirc ?} 22$

COMPARAISON D'ÉTATS

Exemples de problèmes		
 **Recherche de l'un des états**	Bernard possède 25 petites voitures. Il en a 5 de plus (ou de moins) que Charles. Combien Charles en a-t-il ?	
 **Recherche de la « comparaison »**	Dans un magasin un jouet vaut 9,45€. Il vaut 6,60€ dans un autre magasin. De combien est-il moins cher dans le 2ème magasin ?	

COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

Exemples de problèmes		
 **Recherche de la transformation composée**	Gérard a joué deux parties de billes. À la première partie, il gagne 7 billes et à la deuxième il en gagne 8. Combien en a-t-il gagné au total ?	
 **Recherche de l'une des composantes**	Au jeu de l'oie, Julie joue deux coups. Au deuxième coup, elle avance de 9 cases. Au total, elle s'aperçoit qu'elle a reculé de 4 cases. Que s'était-il passé au premier coup ?	

Procédures de résolution utilisables par les élèves

Procédures s'appuyant sur une figuration de la réalité et sur un dénombrement

→ Les objets évoqués dans l'énoncé sont représentés par d'autres objets, par des dessins ou des schémas. À partir de là, l'élève peut avoir recours au dénombrement pour élaborer la réponse.

Procédures utilisant le comptage en avant ou en arrière

→ Ces procédures peuvent constituer en un comptage en avant ou en arrière de un en un, mais peuvent aussi prendre d'autres formes comme par exemple une suite de calculs (« sauts successifs » de 10 en 10, de 20 en 20…) qui rendent compte de l'élaboration progressive de la solution. Ce type de procédures peut être réalisé de façon purement mentale (si les nombres sont « petits ») ou prendre appui sur des traces écrites (droite numérique, par exemple).

Procédures utilisant un calcul sur les nombres, après reconnaissance du calcul à effectuer

→ L'élève a d'abord recours à une traduction mathématique de la situation avant d'effectuer les calculs nécessaires.

Raisonnement et élaboration de procédures

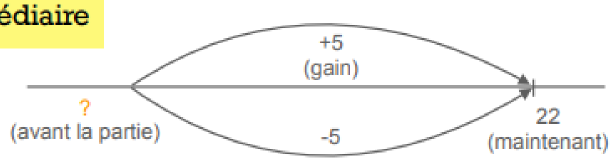
Traduire la situation par un calcul exige souvent de l'élève la mise en oeuvre d'un raisonnement sur les données de la situation ou le recours à une stratégie :

Jacques a gagné 5 billes. Il en a maintenant 22. Combien en avait-il avant la partie ?

Raisonner en s'appuyant sur le contexte évoqué

« Jacques a gagné des billes, avant il en avait moins, je fais donc une soustraction »
« Pour retrouver les billes que Jacques avait au départ, il faut que j'enlève celles qu'il a gagnées »
L'élève transforme le problème posé pour se ramener à un type de problème qu'il sait résoudre.

Faire un schéma intermédiaire



Traduire l'énoncé par une équation

→ Par exemple ici … + 5 = 22 que l'élève résout par une addition à trou ou par comptage en avant. L'élève peut également transformer le calcul : 22 - 5 = … parce qu'il sait que les deux expressions sont équivalentes

Procéder par essais en faisant une hypothèse sur la réponse

→ Par exemple : « J'essaie 12, il en aurait maintenant 17, ça ne va pas, c'est trop petit… »

Il faut être conscient du travail intellectuel auquel doit se livrer l'élève pour résoudre un problème « anodin » pour un expert. L'enseignement doit aider le novice qu'est l'élève en lui permettant de s'approprier des procédures expertes.

Variables didactiques

• La taille des nombres, la taille de leur écart

- x et y petits : toutes les procédures sont possibles, y compris le dessin de chaque objet. Le calcul, s'il est reconnu par l'élève, peut être traité mentalement.

- x grand et y petit : le dessin devient difficile, mais certaines procédures sont faciles à mettre en oeuvre.

- x et y proches : l'élève peut être incité à transformer le problème posé et procéder par calcul mental ou par comptage.

- x et y grands et non proches : le recours au calcul apparaît nécessaire.

• La configurations des nombres
- Les nombres « ronds » rendent les calculs plus faciles et peuvent donc favoriser le recours à des procédures utilisant ces calculs.

- Les nombres décimaux, au contraire, peuvent rendre les calculs plus difficiles (notamment dans le cas de la soustraction).

• La mise à disposition ou non d'outils de calcul
La présence de la calculatrice permet à l'élève d'utiliser des procédures qu'il reconnaît comme pertinentes, même s'il n'est pas capable de les exécuter lui-même. Les tables, les tableaux de numérations… sont également des outils pour l'élève.

Difficultés rencontrées par les élèves en ce qui concerne les problèmes mobilisant des additions et/ou des soustractions

⟶ Structure relationnelle du problème et place de l'inconnue dans cette structure
Ce sont des facteurs décisifs pour expliquer les difficultés des élèves. D'eux dépendent les raisonnements qu'ils peuvent mettre en oeuvre.

⟶ Difficulté des calculs
Cette difficulté est liée à la taille et à la nature des nombres: naturels ou décimaux. Elle est fonction de l'âge des élèves: beaucoup hésitent à mettre en oeuvre une procédure qui nécessite des calculs qu'ils maîtrisent mal.

⟶ Ordre d'apparition des données dans le texte
Si cet ordre ne correspond pas à la chronologie de l'histoire évoquée ou encore s'il ne correspond pas à l'ordre d'utilisation exigé par la résolution, des difficultés peuvent apparaître.

⟶ Présence de mots souvent inducteurs d'une opération déterminée Les mots « gagné, plus, total, augmente » dans les problèmes sont inducteurs de l'addition alors que souvent la résolution experte fait appel à une autre opération (« moins, différence, perd, reste » sont des mots inducteurs de la soustraction).

⟶ Les signes + - et les expressions verbales

Pour exprimer des calculs et des résultats relatifs à l'addition et à la soustraction, les élèves doivent s'approprier des symboles et des expressions verbales. Les signes peuvent être source de plusieurs difficultés d'ordre sémantique et d'ordre syntaxique.

- Au niveau sémantique :

Des écritures comme 58+23 ou 58-23 peuvent être associées à diverses catégories de problèmes. La difficulté vient du fait que a+b et a-b sont, pour certains élèves, liés seulement à des problèmes d'augmentation ou de diminution, ce qui rend difficile le raisonnement. Cette difficulté est renforcée par le fait que le signe + se lit « plus » et le signe - se lit « moins ». C'est une difficulté de conceptualisation que l'école doit aider à surmonter: enrichir, pour l'élève, les catégories de problèmes qui peuvent être résolus par chacune de ces opérations.

- Au niveau syntaxique : Les difficultés sont de deux ordres:

* pour la soustraction, comprendre que seule l'écriture 58-23 est possible avec les nombres naturels alors que, pour l'addition, les deux écritures 58+23 et 23+58 sont possibles (et de plus égales), ce qui renvoie aux propriétés de ces opérations.

* pour les deux opérations, les écritures lacunaires du type 3+…=15 ou …-8=5 conduisent parfois, avec de jeunes élèves, aux réponses respectives 18 et 3, l'élève considérant que la présence des signes + et - indique qu'il faut additionner ou soustraire les nombres donnés.

La terminologie n'est acquise que progressivement par les élèves, avec des hésitations et des maladresses qui ne sont pas nécessairement liées à une incompréhension au niveau sémantique. ***Il est important de repérer les erreurs de type syntaxique et de type sémantique et de ne pas les confondre !***

Pour l'addition
Les termes « plus », « addition » et « somme » sont à connaître. Le mot « plus » correspond à une lecture linéaire. Le mot « somme » désigne le résultat de l'addition. Le mot « addition » désigne l'opération.

Pour la soustraction
Les termes « moins », « soustraction » et « différence » sont à connaître. Le mot « moins » correspond à une lecture linéaire. Le mot « différence » désigne le résultat de la soustraction. Le mot « soustraction » désigne l'opération

La mémorisation du répertoire additif

Disposer en mémoire à long terme des résultats des tables ou de méthodes permettant de les fabriquer instantanément est évidemment indispensable pour alléger la charge de travail et donc diminuer les risques de surcharge cognitive. C**ette mémorisation se fait sur une très longue période, avec beaucoup d'étapes, et n'est le plus souvent assurée qu'au début du CE2.**

- **La maîtrise du répertoire additif suppose de connaître l'équivalence de certains résultats.** Cette maîtrise n'est complète que si le fait de connaître par exemple 7+5=12 implique immédiatement que 12-7 soit reconnu comme égal à 5 ou que l'écart entre 7 et 12 soit reconnu comme égal à 5. L'équivalence des résultats doit faire l'objet d'un apprentissage.

- **Les résultats du répertoire doivent être mis en relation pour être plus facilement mémorisés.**

Si la répétition est un facteur important de la mémorisation, elle n'en constitue qu'un des différents ressorts et ne saurait suffire à elle seule. Il faut, en particulier, tenir compte des deux points suivants :

• La mémorisation est facilitée par la compréhension de ce qui est à mémoriser et par l'intérêt que l'on perçoit pour l'acte de mémoriser.
• Il est plus facile de mémoriser un ensemble structuré de résultats que des résultats isolés ; un travail en profondeur de mise en relation des résultats à mémoriser est donc indispensable

L'apprentissage du répertoire additif

repose sur 5 points d'appui importants :
• *L'ajout ou le retrait de 1 ou de 2 à un nombre inférieur ou égal à 10*
• *La connaissance des doubles*
• *La connaissance des décompositions faisant intervenir le nombre 5*
• *Les compléments à 10*
• *La commutativité de l'addition*

Calcul posé de l'addition et de la soustraction

Il est nécessaire de bien comprendre la numération décimale pour assimiler les techniques opératoires du calcul posé. **Une maîtrise insuffisante des principes de la numération décimale (notamment l'équivalence entre 1 dizaine et 10 unités, 1 centaines et 10 dizaines…) gêne la compréhension de l'utilisation des retenues aussi bien que pour l'addition que pour la soustraction.**

L'addition posée de nombres entiers

Elle ne présente pas de difficulté importante. **La seule difficulté réside dans le principe des retenues, source d'erreurs pour certains élèves, au début de l'apprentissage.**

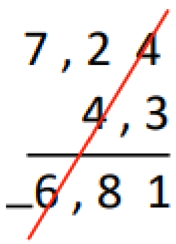
La soustraction posée de nombres entiers

Elle nécessite la mise en oeuvre de propriétés plus complexes qui diffèrent selon la technique choisie

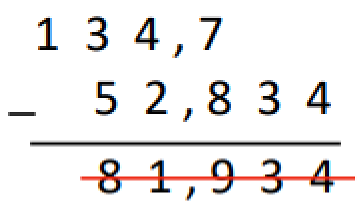
Méthode « par emprunt » ou « par cassage »	**Méthode « par complément »**	**Méthode « traditionnelle »**
6 11 ~~7~~ ~~2~~ 4 1 – 5 6 6 6 8 Comme pour les unités on ne peut pas soustraire 6 de 4, on *« casse »* une des 2 dizaines pour en faire 10 unités.	7 2 4 – 5 6 1 1 6 6 8 + On remplace le calcul de 724-56 par celui de 56+…=724.	7 2 4 1 1 – 5 6 1 1 6 6 8 Comme pour les unités on ne peut pas soustraire 6 de 4, on ajoute simultanément 10 unités au 1er terme et 1 dizaine au 2ème terme.

L'addition et la soustraction posée de nombres décimaux

→ Les difficultés sont accrues lorsque des nombres décimaux sont en jeu. Certains élèves effectuent positionnent les nombres décimaux « à partir de la droite » (comme dans le cas des nombres naturels), sans prendre en compte correctement la virgule.



Le même type d’erreur se rencontre dans le cas de l’addition posée de décimaux et, plus encore, lorsque l'un des deux nombres est un entier.



L’opération est bien posée, mais comme il n’y a pas de chiffre au-dessus de 3 et de 4, les élèves n’imaginent pas les « 0 » non écrits et reproduisent simplement 3 et 4 dans le résultat (pour eux, ils ne peuvent pas être soustraits). Ensuite, la soustraction est correctement poursuivie.

Erreurs fréquentes en ce qui concerne l'addition et la soustraction posées

Présentation des calculs

→ Il s’agit d'un alignement erroné des chiffres lorsque le calcul est posé en colonne et que les nombres utilisés n’ont pas la même longueur. Dans cette présentation, l’élève ne donne pas la signification exacte aux chiffres qui composent les nombres. Cela prouve que pour ces élèves, **le nombre est constitué d’une succession de chiffres que l’on peut ajouter aux chiffres d’un autre nombre sans que ces chiffres prennent une valeur différente selon leur position dans l’écriture des nombres.** Les alignements incorrects des chiffres dans les calculs additifs et soustractifs proviennent aussi souvent d**’une certaine maladresse des élèves dans l’écriture des nombres:** ils écrivent parfois des chiffres de tailles différentes et donc des décalages apparaissent.

—> Chronologie des calculs

Cette erreur est fréquente lorsque les deux termes de l’opération ont le même nombre de chiffres. Ainsi, certains élèves **mettent en oeuvre une chronologie erronée qui consiste à calculer de gauche à droite, comme on lit**. Cela pose des problèmes dans la gestion des retenues. Lors du calcul d’une différence, le chiffre le plus grand peut être retiré à change rang, par exemple.

→ Résultats mémorisés

La production des résultats exacts à l’aide des techniques opératoires repose en partie sur la mémorisation de répertoires (tables). De nombreuses erreurs observées chez les élèves sont liées **à une maîtrise insuffisante de ces répertoires**. Les résultats **sont mal mémorisés ou non mémorisés, ce qui nécessite un travail de reconstruction.** Ces erreurs sont très personnelles. La conception de « 0 » comme « rien » conduit également parfois à des erreurs.

→ Gestions des retenues

C’est une des sources essentielles d’erreur chez les élèves.

- La retenue est écrite mais l’élève n’en tient pas compte ;
- À l’inverse, l’élève note systématiquement des retenues (réelles ou pas) et les intègre dans ses calculs ;
- Certains élèves font une confusion relative au chiffre qu’ils doivent retenir, ils notent le chiffre des dizaines au résultat et gardent en retenue celui des unités ;
- Dans les sommes de plus de 2 termes, quand les retenues dépassent 1, les élèves continuent à noter une retenue égale à 1.
- Lors du calcul d’une différence, la retenue peut être reportée au rang des dizaines comme on le fait pour une addition.

Les calculs au cycle 3

La multiplication ✕

Associativité	Commutativité	Élément neutre	Élément absorbant	Distributivité
Propriété qui permet de « déplacer » des parenthèses et finalement de les supprimer.	Propriété qui permet de « permuter » deux termes.	C'est le nombre 1.	C'est le nombre 0.	Permet de faciliter les calculs.
ax(bxc)=(axb)xc ou a(bc)=(ab)c Ce qui justifie qu'on puisse utiliser une écriture du type : axbxc ou abc qui sont égales aux écritures précédentes.	axb=bxa	ax1=1xa=a	ax0=0xa=0	ax(b+c)=(axb)+(axc) ou ax(b+c)=ab+ac

La division ÷

Conservation du quotient	Division d'une somme
Le quotient (dans la division dans $\mathbb{Q}$) et le quotient entier (dans la division euclidienne) ne sont pas modifiés si on multiplie ou divise les deux termes de la division par un même nombre k.	(Quotient dans $\mathbb{Q}$)
Pour la division dans $\mathbb{Q}$ cela se traduit par : $\frac{a}{b}=\frac{axk}{bxk}$ Pour la division euclidienne a=bq+r avec $0 \leq r < b$, cela se traduit par : ak=(bk)q+rk avec rk < bk Le quotient q n'a pas été modifié, mais le reste r a été multiplié par k.	Dans $\mathbb{Q}$, le quotient d'une somme de rationnels par un rationnel non nul est égal à la somme des quotients : $\frac{a+b+c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}$

Amorcées au cycle 2, l'essentiel des compétences concernant la multiplication et la division sur les nombres entiers naturels **se construisent principalement au cycle 3 (notamment pour la division).**
Elles sont ensuite étendues au cas du produit et du quotient d'un nombre décimal par un nombre entier naturel et du produit de deux nombres décimaux en fin de cycle 3, puis généralisées aux nombres décimaux et aux fractions au cycle 4.

Comme pour l'addition et la soustraction, les compétences sont de deux types :

- **être capable de résoudre des problèmes relevant de ces deux opérations, d'abord par des procédures personnelles** (c'est-à-dire élaborées par l'élève pour chaque problème, notamment lorsqu'il ne reconnaît pas directement le calcul adéquat à réaliser ou qu'il ne l'a pas encore appris: recours à des dessins ou schémas, utilisation du comptage…) **puis en utilisant les procédures expertes (à partir de la reconnaissance que tel problème relève de telle opération) ;**

- **être capable de produire le résultat de tout calcul additif ou soustractif, en choisissant la méthode la plus appropriée compte tenu des nombres en jeu et des outils disponibles** (calcul réfléchi, utilisation d'un algorithme, utilisation d'une calculatrice…).

Typologie des problèmes de multiplication et de division Vergnaud

SITUATION DE PROBLÈME SIMPLE AVEC, AVEC PRÉSENCE DE L'UNITÉ

Problèmes de multiplication

A, B, C, D

1 → C
B → ?

J'ai collé 32 timbres sur chaque page d'un album de 14 pages. Combien y a-t-il de timbres dans l'album ?	1 → 32 14 → D D = B x C
Dans une bande, j'ai découpé 12 rubans de 8cm chacun. Quelle longueur de bande ai-je utilisée ?	1 → 8 12 → D D = B x C

Problèmes de division-partition ou de partage

(recherche de la « valeur d'une part »)

J'ai collé 488 timbres dans un album de 14 pages. Il y a le même nombre de timbres sur chaque page. Combien y a-t-il de timbres par page ?	1 → C 14 → 448 D = B x C ou D = (B x C) + r	1 → ? B → D

Problèmes de division-quotition ou de groupement

(recherche du « nombre de parts »)

Dans une bande de 100cm, je découpe des rubans de 8cm. Combien de rubans puis-je obtenir ?	1 → 8 B → 100 D = B x C ou D = B x C + r	1 → C ? → D

SITUATIONS DE PROPORTIONS SIMPLE, SANS PRÉSENCE DE L'UNITÉ

Ces situations peuvent être représentées par un schéma fonctionnel du type :

A → C

B→ D

Ces problèmes ne peuvent pas être résolus en faisant intervenir une seule opération (multiplication ou division). Ils relèvent de la proportionnalité.

SITUATIONS DE COMPARAISON FAISANT INTERVENIR DES EXPRESSIONS DU TYPE « FOIS PLUS », « FOIS MOINS »

Ces situations peuvent être représentées par un schéma fonctionnel du type :

Objet a A Objet b B ↓	C fois plus ou C fois moins

Pierre a 7 ans. Son père est 4 fois plus âgé. Quel est son âge ?	7 ans ? ↓ 4 fois plus âgé

SITUATIONS DE PRODUIT DE MESURES

Problèmes de multiplication

Avec 3 sortes de figures (carré, triangle, rond)et 2 couleurs, combien peut-on réaliser de pièces différentes ?	Modélisation du problème par un tableau :

	Carré	Rond	Triangle
Jaune			
Rouge			

Problèmes de division

Pour faire un quadrillage rectangulaire de 180 carreaux ayant 12 carreaux sur un côté, combien faut-il de carreaux sur l'autre côté ?	Modélisation du problème par une équation: n = b x x Ici, n = 180 ; b = 12 ; x = nombre cherché 180 = 12 x x

✧ Procédures de résolution ✧ MULTIPLICATION

utilisables par les élèves

Le directeur de l'école a acheté x boîtes de y crayons chacune. Combien a-t-il acheté de crayons ?

SITUATIONS DE PROPORTIONS SIMPLE, AVEC PRÉSENCE DE L'UNITÉ

Cas 1 : y petit et x petit — *y = 6 ; x = 4 → 4 boîtes de 6 crayons*

Procédure utilisant le support d'un dessin ou d'un schéma

Représentation des 4 paquets de 6 crayons |||||| |||||| |||||| ||||||
puis dénombrement des crayons « un par un » ou « de six en six »

Procédure additive

6 + 6 + 6 + 6 = 24 en contrôlant que 6 est bien utilisé 4 fois.
On peut également placer dans ce type de procédures des solutions du type comptage de 6 en 6 : 6/12/18/24 dans laquelle l'addition itérée n'est pas explicitée.

Procédure multiplicative

Calcul mental de 6 x 4 en utilisant un résultat de la table de multiplication.

Cas 2 : y grand et x petit — *y = 48 ; x = 6 → 6 boîtes de 48 crayons*

Les procédures utilisant le support d'un dessin ou d'un schéma deviennent très coûteuses.

Procédure additive

Ce type de procédures est encore efficace, à condition toutefois de savoir calculer des sommes de nombres ayant 2 ou 3 chiffres. Le calcul additif peut devenir plus économique si l'élève pense à utiliser des regroupements de termes, par exemple : 48+48 + 48+48 + 48+48
96 96 96
…

Procédure multiplicative

Elle est très efficace si on sait réaliser les calculs du type 48 x 6 ou si on dispose d'une calculatrice.

Cas 3 : y grand et x grand *y = 64 ; x = 34 → 34 boîtes de 64 crayons*

Les procédures utilisant le support d'un dessin ou d'un schéma sont inutilisables pour résoudre complètement le problème.

Procédure additive

Ces procédures deviennent très difficiles (contrôle du nombre d'itération de y, nombre de calculs à effectuer). Cependant, des moyens de calcul qui économisent le travail à effectuer peuvent être trouvés par les élèves, comme par exemple :

64+64 + 64+64 + 64+64 + 64+64…

128 + 128 + 128 + 128…

256 + 256 + …

512 + …

Dans cette optique, des procédures additives qui utilisent des multiples de y peuvent être mobilisées :
- utilisation de doubles : 128+128+128+…
- utilisation de produits par 10 : 640+640+640+64+64+64+64

Les calculs sont alors plus simples, mais le contrôle du nombre d'itérations de y est plus difficile.

Procédure multiplicative

C'est ici la procédure la plus efficace si on sait calculer des produits ou si on dispose d'une calculatrice.

SITUATIONS DE PRODUIT DE MESURES

Combien de menus différents peuvent être composés avec 3 entrées et 4 plats principaux ?

Écriture de tous les couples possibles La question du contrôle de l'exhaustivité se pose.

Résolution par un schéma Cela permet la représentation de tous les couples (ex : arbre).

Résolution par un tableau à double entrée

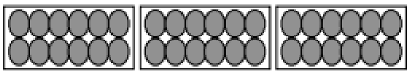
Résolution par un raisonnement À chaque entrée, on peut associer 4 plats principaux, d'où l'addition 4+4+4 ou la multiplication 4x3.

✧ Procédures de résolution ✧ DIVISION

utilisables par les élèves

On range 273 oeufs dans des boîtes de 12. Combien de boîtes peut-on remplir ?

Procédures imagées

dessin figuratif	dessin schématisé
 …	12 12 12 …

L'élève doit régulièrement contrôler qu'il ne dépasse pas 273, en comptant de 12 en 12 ou en additionnant les *« 12 »* représentés.

Ces procédures deviennent très vite peu économiques et difficiles à gérer dès que les nombres sont plus grands. Il s'agit parfois de procédures d'entrée dans le problème qui permettent à l'élève de comprendre la situation et d'imaginer une autre procédure plus rapide.

Procédures progressives fondées sur l'addition ou la soustraction

Additions « pas à pas »

12+12=24+12=36+12=48…	12+12+12+12+12=60 12+12+12+12+12=60 60+60=120 …
Cette suite d'égalités, où l'usage du signe = est incorrect du point de vue mathématique, traduit cependant la démarche de l'élève qui simule le remplissage des boîtes une à une en faisant un bilan des oeufs après chaque boîte remplie.	Cette méthode est comparable à la précédente, mais l'élève fait des bilans partiels du nombre d'oeufs utilisés et réutilise ses calculs antérieurs.

Soustractions « pas à pas »

273-12=261

261-12=249

249-12=237 …

L'élève s'intéresse ici aux oeufs restants à mettre en boîtes plutôt qu'aux oeufs déjà utilisés.

Additions ou soustractions de multiples du diviseur

$$\begin{array}{r} 48 \\ +\ 48 \\ \hline 96 \\ +\ 48 \\ \hline 144 \\ \dots \end{array} \qquad \begin{array}{r} 273 \\ -\ 48 \\ \hline 225 \\ -\ 48 \\ \hline 177 \\ \dots \end{array}$$

Ces procédures sont en fait des améliorations des procédures précédentes, l'élève utilisant le plus souvent un résultat obtenu mentalement (qui correspond au remplissage de plusieurs boîtes).
Ces procédures deviennent plus efficaces lorsque l'élève a l'idée d'utiliser des multiples de 10 (et plus tard de 100), ce qui allège la charge de calcul.

Procédures multiplicatives

L'élève cherche à résoudre une équation du type a x x = b

Pose de la multiplication à trou

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ \dots \\ \hline 273 \end{array}$$

Procédure délicate lorsque le reste n'est pas nul, mais qui peut être une procédure d'entrée vers les procédures suivantes.

Essais de multiples successifs du diviseur

12x10=120
12x12=144
12x11=132
12x13=156
…

Procédure qui peut être fastidieuse si l'élève commence son exploration « trop bas », souvent abandonnée au profit de la suivante.

Essais par approches successives

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 30 \\ \hline 360 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times\ 25 \\ \hline 300 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times\ 15 \\ \hline 180 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times\ 20 \\ \hline 240 \end{array} \quad \dots$$

L'efficacité de cette procédure dépend à la fois de la qualité de l'approximation effectuée au départ et des ajustements successifs en fonction de l'écart du résultat obtenu avec le nombre cible qu'est le dividende. Elle conduit souvent à la réussite, car moins sensible que d'autres à la taille des nombres en présence.
Dans cet exemple, l'élève se rend compte que 360 est très éloigné de 273, il essaie donc un nouveau multiplicateur (25) qui donne encore un résultat trop grand…

Procédures mixtes

L'élève utilise la multiplication et la soustraction.

Quotients partiels « au hasard »

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 15 \\ \hline 180 \end{array} \quad \begin{array}{r} 273 \\ -\ 180 \\ \hline 93 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \times\ 7 \\ \hline 84 \end{array} \quad \begin{array}{r} 93 \\ -\ 84 \\ \hline 9 \end{array}$$

quotient: 15+7=22, reste: 9

Pour ces procédures mixtes, l'élève fait un essai de multiple (inférieur au dividende), calcule l'écart entre ce produit et le dividende, puis recommence avec l'écart. Il obtient ainsi une suite de quotients partiels qu'il doit ensuite additionner.

Utilisation de multiples de 10, 100… pour les quotients partiels

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 20 \\ \hline 240 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 273 \\ -\ 240 \\ \hline 33 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \times\ 2 \\ \hline 24 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 33 \\ -\ 24 \\ \hline 9 \end{array}$$

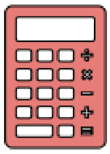
Ces types de procédures peuvent déboucher sur une présentation traditionnelle *« en potence »*.

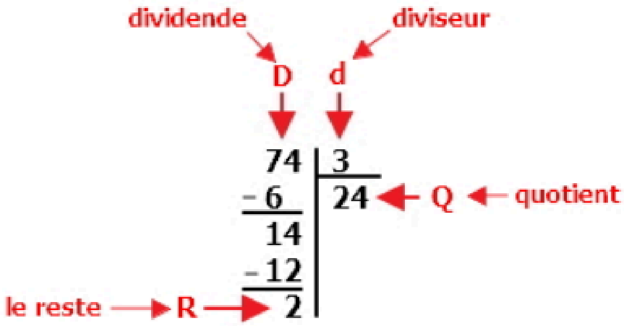
$$\begin{array}{r|l} 273 & 12 \\ \cline{2-2} -\ 240 & 20 \\ \cline{1-1} 33 & \\ -\ 24 & \\ \cline{1-1} 9 & \end{array}$$

Utilisation de la division

Calcul de la division ou utilisation de la calculatrice

En utilisant cette procédure, l'élève a reconnu le modèle expert dont relève le problème posé.





Variables didactiques

- La familiarité avec le contexte
- La manière dont l'énoncé est formulé (ordre dans lequel sont fournies les données, place de la question, forme uniquement textuelle ou texte accompagné d'une image ou d'un dispositif expérimental…).

Concernant les problèmes à résoudre par une multiplication ou une division, plusieurs facteurs influencent sur la plus ou moins grande difficulté du problème et les procédures que les élèves peuvent mobiliser :

- Type de problèmes : certains sont mieux réussis que d'autres.
- Types de nombres utilisés : certains posent des difficultés tout à fait particulières (ex: décimaux).
- Taille des nombres en jeu : rend possible ou non telle ou telle catégorie de procédures.

- Outils de calcul disponibles ou non : la calculatrice permet, par exemple, de ne pas faire intervenir les compétences en calcul des élèves et leur laisse ainsi plus de liberté quant au choix de la procédure.

Concernant les problèmes de « division », 3 autres variables peuvent être mises en évidence :

- Valeur du quotient : elle est plus ou moins facile à calculer selon qu'il est ou non composé d'un seul chiffre ou qu'il s'exprime par un nombre entier de dizaines ou de centaines…
- Existence ou non d'un reste non nul : cela peut rendre les calculs plus ou moins facilement interprétables.

Réponse à interpréter à partir d'un terme de la division : la réponse peut être fournie :

- soit par le quotient entier ;
- soit par le quotient augmenté de 1 ;
- soit par le reste ;
- soit par le quotient et le reste. Les problèmes les plus fréquents se limitent à exiger une réponse en utilisant le quotient entier, ce qui fait que les autres cas sont plus difficiles à interpréter

Erreurs fréquentes et difficultés rencontrées par les élèves en ce qui concerne la multiplication et la division

*Choix de la procédure de résolution
Elles peuvent en particulier être influencées par des termes de l'énoncé ou par un contexte qui a souvent été utilisé pour une autre opération. Le mot « chaque » est souvent un indice utilisé par les élèves pour identifier les problèmes de multiplication, mais cela peut amener à conduire un raisonnement erroné.

*Exécution de la procédure choisie
Certaines procédures deviennent très vite peu économiques et difficiles à gérer dès que les nombres sont plus grands. Cela peut donc engendrer des erreurs chez certains élèves.

*Interprétation des calculs effectués

Dans une division euclidienne, les chiffres écrits successivement pour constituer le quotient sont le résultat d'une approximation (« en…combien de fois… ») qui peut conduire à essayer un chiffre erroné, donc provisoire. La division est la seule opération dans laquelle un chiffre « calculé » peut ne pas être définitif.

*Chronologie des calculs
Multiplication : Calculer de gauche à droite, comme on lit. Également lorsque le multiplicateur est un nombre supérieur à 10, les élèves doivent gérer des décalages lorsque l'on passe du rang des dizaines du multiplicateur, puis au rang des centaines, etc. L'oubli des décalages successifs est une erreur classique. On observe une variante de ce type d'erreur lorsque le multiplicateur comporte un zéro dans son écriture à un rang autre que celui des unités. Certains élèves oublient alors le décalage supplémentaire lié à la présence de ce zéro.

Division : La division posée est la seule opération pour laquelle les calculs s'effectuent en considérant le dividende « de gauche à droite » alors que les autres opérations posées se calculent « de droite à gauche ».

*Présentation des calculs
Alignement erroné : l'élève ne donne pas la signification exacte aux chiffres qui composent les nombres. La division posée exige d'effectuer simultanément des divisions (recherche de chaque chiffre du quotient), des multiplications (produit du diviseur par chaque chiffre du quotient) et des soustractions. Si on pose les soustraits partielles, la charge de travail de l'élève est allégée. Elle nécessite donc une bonne aisance en calcul mental, une parfaite connaissance des tables et le maintien en mémoire de nombreux résultats partiels.

*Résultat mémorisés
Résultats mal ou non mémorisés.

*Gestions des retenues

- La retenue est écrite mais l'élève n'en tient pas compte ;
- À l'inverse, l'élève note systématiquement des retenues (réelles ou pas) et les intègre dans ses calculs ;
- La retenue peut être traitée comme dans une addition ;
- Les résultats partiels peuvent être juxtaposés ;

- Certains élèves font une confusion relative au chiffre qu'ils doivent retenir, ils notent le chiffre des dizaines au résultat et gardent en retenue celui des unités ;
- Si on ne pose pas les soustractions partielles lors d'une division euclidienne, celles-ci peuvent faire intervenir des retenues supérieures à 1, ce qui est inhabituel pour les élèves.

*Recherche des chiffres du quotient
L'élève peut faire des essais successifs pour la recherche des chiffres du quotient mais oublier de supprimer les essais infructueux. La recherche préalable du nombre de chiffres du quotient vise à éviter ce type d'erreurs. On pourrait aussi demander à l'élève de contrôler son résultat en multipliant le quotient pas le diviseur, puis en ajoutant le reste et en comparant le résultat au dividende.

*Les signe x ÷ et les expressions verbales

- Pour la multiplication

Les expressions symboliques ne présentent pas de difficulté particulière, dès lors que l'élève donne du sens à une écriture comme 25x13, c'est-à-dire qu'il la relie soit aux additions répétées 25+25+25+… (13 termes) ou 13+13+13+… (25 termes), soit à des catégories de problèmes. La difficulté principale vient de l'interprétation de produits à plusieurs facteurs.
La lecture des expressions symboliques n'est pas sans difficulté et souvent source d'interrogations chez les enseignants.

Deux formulations sont utilisées, utilisant le mot « fois » ou l'expression « multiplié par ». Le mot « fois » suscite des questionnements: « 5 fois 3 » doit-il être associé à 5x3 ou 3x5 ?

Ce qui semble le plus pertinent avec les élèves est de mettre en évidence la commutativité de la multiplication : si 5 fois 3 est connu, 3 fois 5 l'est aussi.

Le terme « produit » est utilisé avec deux significations : il désigne une écriture et un résultat.
Le mot « facteur » utilisé comme « terme d'un produit » n'est pas indispensable à l'école primaire; il le deviendra au collège avec des expressions comme « facteur commun », factorisation.

Pour la division

Les expressions symboliques présentent de nombreuses difficultés :

- La première est liée au fait que la division euclidienne fournit deux résultats : le quotient entier et le reste, et qu'aucune notation symbolique ne permet de les exprimer.

Il faudrait disposer de notations telles que 17q5=3 (pour le quotient) et 17r5=2 (pour le reste). Les notations, parfois utilisées dans des manuels (comme 17:5=3 reste 2) ne sont pas satisfaisantes et sont même dangereuses car elles véhiculent une signification erronée du signe =.

Mieux vaut se limiter à l'égalité caractéristique de la division euclidienne: 17=(5x3)+2. Le recours au signe « : » est légitime pour écrire un quotient exact entier ou décimal (15:5=3 ou 17:5=3,4) ou un quotient décimal approché (23:7≃.3,29). Le signe « ÷ » de la calculatrice pose d'autres problèmes car, selon les calculatrices, il fournit un arrondi ou une troncature du résultat.

<u>Pour la division, on se limite, au cycle 3, à la connaissance des termes « quotient » et « reste », les termes « dividende », « diviseur » pouvant également être utilisés.</u> Il faut cependant être conscient du fait que l'usage (même correct de ces mots n'en garantit pas la compréhension.

Calcul posé de la multiplication

La construction progressive de la <u>technique usuelle de la multiplication posée débute actuellement à la fin du cycle 2 (multiplication par un nombre à un chiffre). Elle est mise en place de façon générale au CE2.</u>

Les connaissances préalables nécessaires à cet apprentissage sont de plusieurs types :

- <u>Les produits des tables de multiplication doivent être disponibles rapidement</u> : une bonne mémorisation en est donc indispensable.

- <u>La décomposition des nombres en fonction de leur écriture en base dix doit être maîtrisée</u> (décomposition du type : 507=500+7 ou 507=7+500). - Le repérage de la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture d’un nombre (unités, dizaines…) est indispensable pour une bonne gestion des retenues.

- Les élèves doivent être capables de remplacer un produit par une somme de produits en utilisant « en acte » les propriétés :

* de distributivité de la multiplication sur l’addition : 438x507 est égal à (438x7)+(438x500)

* de l’associativité de la multiplication : 438x500 est égal à (438x5)x100.

- Les élèves doivent connaître la règle des « 0 » (comment multiplier par 10 ou par 100).

Calcul posé de la division

La construction progressive de la technique usuelle de la division posée débute actuellement en CE2 (le diviseur étant un nombre à un chiffre).
Elle est mise en place de façon générale au CM1.
Les connaissances préalables nécessaires à cet apprentissage sont de plusieurs types :

- Le repérage de la valeur des chiffres : en fonction de leur position dans l’écriture d'un nombre (unités, dizaines…) est indispensable pour une bonne gestion des calculs ainsi que la décomposition des nombres en milliers, centaines…

- Les tables de multiplication doivent être bien maîtrisées pour pouvoir donner rapidement des produits ou des quotients.

- Le calcul approché (est nécessaire pour répondre à des questions du type « combien de fois… dans…? ».

- Le calcul de produits et de différences doit être bien maîtrisé.

Progression envisagée

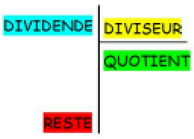
de la multiplication

- 1ère étape : multiplication d'un nombre par un nombre à un chiffre ;
- 2ème étape : multiplication d'un nombre par un nombre du type 20, 300… ;
- Multiplication de deux nombres quelconques.

Le résultat d'une multiplication s'appelle le *produit* et les nombres que l'on multiplie entre eux sont les *facteurs*.

de la division

- 1ère étape : division d'un nombre entier par un nombre entier à un chiffre ;
- 2ème étape : division d'un nombre entier par un nombre entier à plus d'un chiffre ;
- 3ème étape : division décimale de deux nombres entiers ;
- 4ème étape : division décimale d'un nombre décimal par un nombre entier.



Le nombre que l'on divise s'appelle le *dividende* et celui par lequel on divise s'appelle le *diviseur*.

Approche de la notion de multiple

Progression envisagée

- Au CE2 : les notions de double, de triple et de quadruple sont enseignées en même temps que celles de moitié, de tiers et de quart, ce qui prépare à l'étude des fractions simples l'année suivante ;
- Au CM1 : l'élève est amené à reconnaître les multiples de nombres d'usage courant (5, 10, 15, 20, 25, 50), les multiples de 2 (doubles) ayant été déjà étudiés depuis le CP.

Les procédures utilisables par les élèves pour reconnaître si un nombre donné est multiple d'un autre nombre peuvent être de :

- **Chercher s'il est dans la table de multiplication** *« prolongée »* de n, par exemple en comptant de n en n à partir de 0 pour savoir si on *« passe par n »* ou en s'appuyant sur un multiple connu de n, puis en avançant de *n* en *n*.
- **Essayer des nombres** *k* susceptibles de faire que le produit *n x k* soit égal au nombre donné.
- **Diviser le nombre donné par n pour vérifier si on obtient un reste nul ou non.**
- **Utiliser une propriété connue**, comme par exemple un critère de divisibilité.

Difficultés

En dehors des difficultés liées à la conduite des calculs, on peut mentionner celles qui sont liées :

- À une confusion entre multiple et multiplication : l'élève calcule 24x3 lorsqu'on demande si 24 est un multiple de 3.
- À la dissymétrie de l'expression « …est multiple de… » : l'élève confond « 24 est multiple de 3 » et « 3 est multiple de 24 ».
- À une extension de propriétés valables seulement pour certains nombres : ainsi, prolongeant abusivement ce qui est valable pour 2, l'élève répond que

18 est multiple de 4 car 8 est dans la table de multiplication par 4 (il pense que dans tous les cas, il suffit de regarder le chiffre des unités).

Problèmes envisageables à l'école primaire

- Problèmes qui font appel seulement à la notion de multiple
- Problèmes qui font implicitement appel à la notion de multiple commun

