Fractions et nombres décimaux

▸ L’étude des fractions et des nombres décimaux commence au CM1 et se poursuit pendant les premières années de collège.

▸ À l’école primaire, l’étude des fractions est limitée à des cas simples (demi, quart, dixième, centième, millième) et a essentiellement pour but d’aider la compréhension des nombres décimaux écrits avec une virgule. Le calcul sur les fractions n’est pas envisagé, en dehors de l’addition de fractions de même dénominateur.

▸ L’enseignement de la désignation des nombres décimaux avec une virgule s’inscrit dans la suite de celle de la numération décimale de position avec les nombres naturels, dont elle reprend les principes. Les élèves apprennent à calculer avec les nombres décimaux

	Insuffisance des nombres entiers naturels	Apport des fractions et des nombres décimaux
MESURE	La mesure d'une grandeur à l'aide d'une unité donnée s'exprime rarement par un nombre entier.	L'idée de fractionner l'unité, éventuellement plusieurs fois, permet d'exprimer une mesure en n'utilisant qu'une seule unité.
GRADUATION	Pour le repérage des points sur une ligne, les nombres entiers lassent beaucoup de « vides ».	L'idée, encore, de fractionner chaque intervalle permet de repérer de nouveaux points de cette ligne à l'aide d'un nombre décimal.
CALCUL	Certains calculs n'aboutissent pas à une réponse satisfaisante avec les entiers naturels. C'est en particulier le cas de la division. Avec les nombres naturels, on ne peut obtenir qu'un quotient entier et un reste.	Les fractions apportent une solution simple à certains calculs. Par exemple, le quotient de 16 divisé par 3 est 16/3. Et les nombres décimaux permettent d'en donner une approximation: 5,3 ou 5,333.

Les factions et nombres décimaux pour exprimer une mesure

Les fractions sont introduites au CM1 comme des outils pour exprimer et communiquer des mesures à partir d’une unité dans des cas où cette mesure ne s’exprime pas par un nombre entier d’unités.

⟶ Exemple : Deux élèves disposent de la même bande unité. L’un des deux doit permettre à l’autre de tracer un segment de même longueur que le segment [AB] à l’aide de la bande unité (sans règle graduée). A B bande unité Procédure de base - **Report et comptage des reports**: Des élèves de CM1 ou CM2 vont chercher combien de fois il est possible de reporter la bande unité sur le segment [AB].

Variables didactiques

• Rapport entre la longueur du segment et celle de la bande unité ;
• Nombre de bandes unité disponibles pour l'élève, le report étant plus facile à gérer lorsque les bandes unités peuvent être mises bout à bout ;
• Possibilité de plier les bandes de différentes façons car la tâche est ainsi facilitée ;
• Longueur de la bande unité : plus celle-ci est longue, plus les parts obtenues par partage en 2, 3, 4 ou 5 peuvent être distinguées les unes des autres

Procédures possibles

Variable didactique principale	Procédures
Rapport entier	Report et comptage du nombre de reports: le résultat est un nombre entier.
Rapport fractionnaire avec un dénominateur simple multiple de 2 *(par exemple 2 ou 4)*	Report d'un nombre entier d'unités, puis report de la bande unité pliée en 2 ou en 4 (pliage facile à imaginer et à réaliser).
Rapport fractionnaire avec un dénominateur simple mais non multiple de 2 *(par exemple 3 ou 5)*	Même procédure que ci-dessus, mais le partage en 3 ou en 5 est moins naturel et plus difficile à réaliser.
Rapport fractionnaire plus compliqué que les précédentes ou rapport non fractionnaire	Ce cas rend très difficile, voire impossible, la résolution du problème posé.

Passage des fractions aux nombres décimaux

Le travail sur les fractions simples est prolongé par une étude des fractions décimales, puis par celle des nombres décimaux exprimés par une écriture à virgule. On peut faciliter ce passage par le recours à un tableau de numération, la virgule servant à distinguer la partie entière (qui est un nombre entier) de la partie décimale (qui est un nombre plus petit que 1)

CENTAINES	DIZAINES	UNITÉS	,	DIXIÈMES	CENTIÈMES	MILLIÈMES
100	10	1		1/10	1/100	1/1000

À partir de là, on retrouve les principes de la numération décimale de position avec les équivalences du type :

1 centième = 10 millièmes	1 millième = 1/10 centième
1 dixième = 10 centièmes	1 centième = 1/10 dixième
1 unité = 10 dixièmes	1 dixième = 1/10 unité
1 dizaine = 10 unités	1 unité = 1/10 dizaine
1 centaine = 10 dizaines	1 dizaine = 1/10 centaine

Fraction et nombres décimaux pour repérer des points sur une droite

Les fractions et les nombres décimaux permettent d'apporter des réponses à la question du repérage des points sur une ligne graduée, dans le prolongement de ce qui est fait avec les nombres entiers.

Nombres décimaux et système métrique

Les nombres décimaux, d'abord utilisés avec des unités de mesure non conventionnelles, permettent ensuite d'exprimer des longueurs, des masses, des aires et même des durées avec les unités du système légal.

Mesure des longueurs

Le système métrique usuel est fondé sur des relations décimales entre les unités :

1 cm = 1/100 m

1dm = 1/10 m

1dam = 10m

Mesure des aires

Plus complexe, il faut utiliser les égalités du type :

1 dm² = 1/100 m²

1mm² = 1/100 cm²

Mesure des durées

Les relations entre unités ne sont plus liées à des puissances de 10 :

1h15 = 1h + $\frac{1}{4}$ h = 1,25h

4min24s = 4min + $\frac{24\text{min}}{60}$ = 4min + $\frac{4\text{min}}{10}$ = 4,4min

Désignation des fractions et des nombres décimaux
Désignation des fractions

Compétences à acquérir → au cycle 3, les élèves doivent essentiellement apprendre :

• Une première signification de l'écriture fractionnaire. Dans un contexte de mesure, 4/3u est associé au report 4 fois d'une longueur obtenue en partageant en 3 l'unité initiale

• La lecture des fractions → Avec les mots demi, tiers et quart lorsque le dénominateur est 2, 3 ou 4. Avec des mots en -ième lorsque le dénominateur est différent de 2, 3 ou 4.

• Le fait qu'une fraction peut être décomposée en partie entière et partie fractionnaire inférieure à 1 8=2+2 car dans 8 il y a 2 fois trois tiers et encore 2 tiers. 3 3 3

Erreurs fréquentes dans l'écriture des fractions

Non différenciation de $\frac{4}{3}$ et de $\frac{3}{4}$

L'élève inverse la fonction du dénominateur (qui indique en combien de parts égales l'unité est partagée) et celle du numérateur (qui indique combien de parts sont reportées).

Impossibilité à donner du sens aux fractions supérieures à 1

C'est souvent dû à la situation choisie au départ de l'apprentissage : il est difficile de concevoir ce que peuvent représenter les fractions supérieures à 1.

Difficulté à concevoir que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

4 et 6 étant supérieurs à 2 et 3, certains élèves pensent que $\frac{4}{6} > \frac{2}{3}$

Désignation des nombres décimaux

Compétences à acquérir →

Au cycle 3, les élèves rencontrent 4 types d'expressions des nombres décimaux :

- **L'écriture décimale avec une virgule**

Il s'agit essentiellement de permettre aux élèves de comprendre que la valeur d'un chiffre dépend de la position qu'il occupe dans l'écriture et de maîtriser les relations qui existent entre les chiffres situés à des rangs différents, en particulier les relations avec l'unité.

Dans 405,26 « 4 » représente 4 centaines d'unités, « 6 » représente 6 centièmes d'unité, « 2 » vaut « 100 fois moins » que s'il occupait la place de 0…

- **Les décompositions associées à cette écriture**

405,26 = 405 + 0,26 (qui fait apparaître la partie entière et la partie décimale).

405,26 = 4 x 100 + 5 + 2 x 0,1 + 6 x 0,01.

- **Les écritures utilisant des fractions décimales**

$405{,}26 = 405 + \frac{26}{100} = 405 + \frac{2}{10} + \frac{6}{100} = 4 \times 100 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{6}{100} = \frac{40\,526}{100}$

- **Les désignations verbales**

En lecture courante, 405,26 est souvent lu *quatre-cent-cinq virgule vingt-six* (ce type de lecture renforce certaines erreurs s'il est privilégié).

En lecture « signifiante », 405,26 se lit *quatre-cent-cinq et vingt-six centièmes* ou *quatre-cent-cinq deux dixièmes et six centièmes* (en lien avec les décompositions précédentes). Ces lectures signifiantes doivent être privilégiées à l'école.

Erreurs fréquentes dans l'écriture des nombres décimaux

Confusion entre écriture décimale et écriture fractionnaire

→ Pour les élèves, l'écriture fractionnaire, comme l'écriture décimale, signale souvent seulement une séparation entre deux nombres entiers (par exemple : 2/10 = 2,10).

Écriture décimale conçue comme représentant deux nombres entiers séparés par une virgule

→ C'est ce que révèlent des erreurs comme 1,8 + 2,6 = 3,14. Les élèves traitent séparément les nombres entiers avant la virgule et ceux qui sont après la virgule. Les lectures « un virgule huit » et « deux virgule six » renforcent cette conception erronée.

Mauvaise maîtrise de la signification des chiffres d'une écriture à virgule en fonction du rang qu'ils occupent

→ Ex : confusion entre les mots dixième et dizaine. Les élèves imaginent une « symétrie » de ces termes par rapport à la virgule. Ainsi, dans 754,61, le chiffre 1 est déclaré chiffre des dixièmes, les élèves estimant que si dizaine correspond à 2 chiffres avant la virgule alors dixième correspond à 2 chiffres après la virgule.

Les mots dizaine, dixième… désignent des rangs plus que des valeurs

→ Dixième est correctement associé au 1er chiffre à droite de la virgule, mais sa valeur n'est pas reconnue comme associée à ce qu'on obtient en partageant l'unité en dix.

Technique de comparaison des fractions et des nombres entiers

Comparaison de fractions

La comparaison de fractions n'est envisagée au cycle 3 que dans des cas simples avec des fractions de même dénominateur pouvant s'y ramener facilement. Le recours à des représentations des fractions par des longueurs ou des aires est une aide précieuse, de même que le placement des fractions sur une droite graduée.

$\frac{5}{4}$ plus grand que $\frac{3}{4}$	Facilement reconnu, la lecture de ces deux nombres « *cinq quarts* » et « *trois quarts* » permet de conclure.
$\frac{5}{4}$ supérieur à 1	Difficile à établir. Les élèves peuvent prendre appui sur le fait qu'« il faut 4 quarts pour faire 1 ».
$\frac{3}{2}$ égal à $\frac{6}{4}$	Nécessite de faire le raisonnement suivant: un quart est obtenu en partageant un demi en deux ; chaque demi donne deux quarts, donc 3 demis donnent 6 quarts. Les élèves doivent dépasser l'idée selon laquelle $\frac{6}{4} > \frac{3}{2}$ en se basant sur les nombres qui les composent.

Comparaison de nombres décimaux

La comparaison des nombres décimaux occupe une place importante au cycle 3. Les élèves apprennent un algorithme de comparaison de ces nombres exprimés à l'aide d'une écriture à virgule en étant placés dans des situations qui les conduisent à comprendre et à justifier les procédures utilisées.

Procédure 1 : Considérer la valeur de chaque chiffre en partant du chiffre de plus grande valeur.

2,038 ; 0,54 ; 2,17 ; 2,05

→ les nombres qui ont 2 pour chiffres des unités sont plus grands que 0,54.

→ 2,17 est plus grand que 2,038 et 2,05 car son chiffre des dixièmes est plus grand.

→ 2,05 est plus grand que 2,038 car son chiffre des centièmes est plus grand que celui de 2,038: 5 > 3.

0,54 < 2,038 < 2,05 < 2,17

Procédures 2 et 3 : Comparer d'abord les parties entières. Dans le cas où elles sont différentes, la conclusion est immédiate. Dans le cas où elles sont égales, deux démarches sont possibles :

- mettre les parties décimales « au même format ».
- examiner successivement chaque chiffre situé à droite de la virgule.

Il faut préférer la procédure 1 car elle ne ramène pas la comparaison de décimaux à la comparaison d'entiers, assimilation qui est source d'erreurs.

Erreurs fréquentes concernant la comparaison de nombres décimaux

Non-prise en compte de la virgule

⟶ Pour l'élève, le nombre le plus grand est celui qui est écrit avec le plus de chiffres (comme cela fonctionne pour les nombres entiers)

Les parties entières étant égales, comparaison des parties « après la virgule » comme s'il s'agissait de nombres entiers

⟶ L'élève utilise une règle implicite ou théorème-élève : « si deux nombres décimaux ont la même partie entière, le plus grand des deux est celui qui a le plus grand nombre à droite de la virgule ».

Tout nombre possède un successeur

⟶ L'élève considère que 3,1 est le nombre « qui vient après » 3.

« Plus on se déplace vers la droite, plus les chiffres ont une valeur faible »

⟶ L'élève en déduit que, si on écrit d'autres chiffres à droite, on obtient un nombre plus petit !

Entre un nombre entier (aucun chiffre après la virgule) et un nombre écrit avec deux chiffres après la virgule, on ne peut placer qu'un nombre qui a un chiffre après la virgule

⟶ 3 < 3,1 < 3,09

Toutes ces difficultés **sont révélatrices des conceptions que les élèves se sont forgées à propos des nombres décimaux**, dans le prolongement de leurs connaissances sur les naturels. P**our de nombreux élèves, un nombre décimal est pensé, à partir des écritures à virgule, comme deux nombres naturels autonomes séparés par une virgule, voire comme un seul naturel muni d'une virgule**. Cette conception est renforcée par le fait que parfois ces « théorèmes élèves » produisent des résultats corrects.

Ces difficultés sont aussi entretenues par les lectures courantes du type **« deux virgule cinq », au lieu de « deux et cinq dixièmes »**, et par la signification de la virgule dans les textes.

Ces conceptions erronées peuvent avoir :

- Une origine de type épistémologique dans la mesure **où les élèves prolongent naturellement sur les nombres décimaux certaines propriétés des entiers.**

- Une origine de type didactique provenant des choix d'enseignement. E**x : pour introduire les nombres décimaux, l'enseignant peut les présenter comme un autre moyen de coder des mesures s'exprimant au moyen de plusieurs unités (3 m 14 cm = 3,14m). Cela peut induire chez les élèves le prolongement sur les décimaux des propriétés des nombres entiers.**

