

Grandeur et mesure

Qu'est-ce qu'une GRANDEUR ?

Une grandeur peut être considérée comme « tout caractère d'un objet, susceptible de variation chez cet objet, ou d'un objet à l'autre ».

Une grandeur d'un objet est définie par deux relations qui lient ces objets :

- une relation d'égalité qui permet d'établir que deux objets ont la même grandeur ;
- une relation d'inégalité qui permet d'établir qu'un objet est plus « grand » qu'un autre.

Pour un même objet, on peut définir plusieurs grandeurs : longueur, masse, volume... On peut comparer des grandeurs d'objets par comparaison directe (perception, juxtaposition, superposition) ou par comparaison indirecte en utilisant un objet intermédiaire ou une transformation licite.

On peut définir une grandeur sans avoir recours aux nombres. Mais ces différentes méthodes de comparaison de grandeurs ne sont pas toujours utilisables, soit parce qu'elles sont irréalisables, soit parce qu'elles sont très « lourdes » à mettre en œuvre.

Qu'est ce que la mesure ?

Ayant fait le choix d'une grandeur appelée « unité », la mesure d'une grandeur d'un objet est le nombre d'« unités » permettant de réaliser une grandeur égale à celle de cet objet.

La mesure est donc un nombre. La mesure d'un objet dépend de l'unité choisie ; par contre, la grandeur est invariante.

Dans certains cas, on peut se contenter d'encadrer la mesure d'un objet.

Pour chaque grandeur, le système d'unités de mesure est construit en cohérence avec le système de numération décimale. Les élèves doivent comprendre la relation entre les préfixes utilisés et les expressions utilisées pour les unités de numération : un décamètre est une dizaine de mètres, un kilomètre est un millier de mètres...

Pour mesurer des longueurs de segments, on peut prendre un segment quelconque auquel on choisit d'attribuer 1 comme mesure de sa longueur : on l'appelle « segment-unité ».

On reporte le segment unité sur le segment que l'on mesure et on compte le nombre de reports.

Pour mesurer des longueurs d'objets divers, on dispose de plusieurs méthodes : reporter la longueur unité et compter le nombre de reports, utiliser un instrument, effectuer un calcul.

Les activités liées aux grandeurs et à la mesure à l'école primaire font intervenir, en étroite imbrication, des notions géométriques (pour les longueurs, les aires et les volumes) et des notions numériques (pour toutes les grandeurs). Elles contribuent à une meilleure maîtrise des unes et des autres.

Aider les élèves à conceptualiser les différences entre objet réel, grandeur et mesure de cette grandeur

L'élève doit apprendre à faire la différence entre :

- * un objet réel ou géométrique ;
- * une grandeur associée à cet objet ;
- * la mesure de cette grandeur.

Aider les élèves à donner du sens à la mesure

Cela nécessite dans un premier temps de mettre en place des activités de comparaison des grandeurs indépendamment de toute unité pour aider l'élève à s'appropriier le concept de grandeur, puis de mettre en évidence les limites des méthodes de comparaison, pour enfin donner du sens à la notion de mesure. Ainsi, l'enseignement d'une grandeur et de sa mesure passe en général par les étapes suivantes :

- travail sur la grandeur : comparaisons dans des situations pour lesquelles la notion de grandeur suffit ;
- travail sur la mesure à l'aide d'une unité : comparaisons dans des situations pour lesquelles le gabarit est trop petit (nécessité de faire des reports) ;
- travail sur la mesure en utilisant le calcul.

Compétences relatives aux longueurs comparer sans mesurer SAVOIR COMPARER DES LONGUEURS D'OBJETS « RECTILIGNES » SANS INSTRUMENT DE MESURE

| Procédures | Difficultés/erreurs |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Si les longueurs sont très différentes, l'élève peut procéder à vue d'oeil. • Si les objets sont facilement transportables, l'élève peut faire coïncider les extrémités. • Si les objets ne sont pas facilement transportables, l'élève peut : <ul style="list-style-type: none"> - <i>utiliser un objet intermédiaire transportable ;</i> - <i>reporter la longueur du 1er objet sur le 2ème avec un compas ;</i> - <i>reporter un objet unité ou plusieurs différents.</i> • Si on est en présence d'un objet du méso-espace non transportable, l'élève peut utiliser un objet intermédiaire ou reporter un objet unité. | <ul style="list-style-type: none"> ○ Élèves non conservants ○ Difficultés de manipulation entraînant des problèmes de précision |

Les variables didactiques concernent les caractéristiques des objets à comparer (longueurs, déplacement...).

SAVOIR COMPARER DES LONGUEURS DE LIGNES BRISÉES ET DES PÉRIMÈTRES (NON DÉPLOYABLES)

| Procédures | Difficultés/erreurs |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Si l'élève dispose d'un compas, il doit reporter sur une demi-droite les longueurs des segments qui constituent la ligne brisée ou le périmètre. • Si l'élève dispose d'objets d'intermédiaires qu'il peut couper à la longueur qu'il veut, comme une paille par exemple, il les superpose sur chacun des segments de la ligne brisée, puis met les objets bout à bout de façon rectiligne. | <ul style="list-style-type: none"> ○ L'élève ne voit pas le lien entre le compas et la comparaison des longueurs car, pour lui, le compas sert essentiellement à tracer des cercles ○ L'élève applique des théorèmes en acte : « La ligne brisée la plus longue est celle qui contient le segment le plus long » ○ Difficultés de manipulation |

La variable didactique concerne les instrument mis à disposition des élèves

| Procédures | Difficultés/erreurs |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Si le gabarit est suffisamment long, l'élève peut l'utiliser directement. • Si le gabarit n'est pas suffisant, il faut le reporter autant de fois que nécessaire et ensuite comparer les nombres de reports, et en cas d'égalité comparer les restes. | <ul style="list-style-type: none"> ○ Problème de manipulation ○ Difficulté à mémoriser le nombre de reports |

Les études de **Piaget** ont mis en évidence que la **conservation des longueurs** se met en évidence au stade des opérations concrètes. Deux types d'expériences mettent en évidence cette difficulté à conserver les longueurs quand il s'agit de les comparer :

Expérience 1

L'enseignant place devant l'élève deux bandes A et B, exactement l'une sous l'autre :



Il déplace la bande B vers la droite (sous le regard de l'élève) :



Dans le premier cas, l'élève affirme que « B est aussi long que A ». Dans le deuxième cas, il affirme que « B est plus long que A ». On dit que cet élève **n'est pas conservant pour les longueurs**.

Expérience 2

On place tout d'abord devant un enfant une baguette de 16cm et en dessous 4 baguettes de 4cm mises bout à bout pour faire constater l'égalité des longueurs :



On propose ensuite à l'enfant la disposition suivante avec les mêmes baguettes :



C'est seulement vers 7 ans (mais parfois beaucoup plus tard) que l'enfant affirme avec certitude que les chemins A et B ont encore la même longueur.

Compétences relatives à la mesure de longueurs

SAVOIR MESURER DES LONGUEURS D'OBJETS « RECTILIGNES » AVEC LE DOUBLE-DÉCIMÈTRE

| Procédures | Difficultés/erreurs |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Si ce rapport est un nombre entier, inférieur à la longueur de l'instrument, l'élève place une extrémité de l'objet sur le 0 de la graduation de son instrument de mesure et il lit sur quelle graduation arrive l'autre extrémité de l'objet. • Si ce rapport est un nombre décimal inférieur à la longueur de l'instrument, la procédure est la même que précédemment. Sauf dans le cas où l'extrémité du segment tombe entre 2 graduations (ex : 2,75cm). • Si ce rapport est un nombre (entier ou décimal) supérieur à la longueur de la règle, l'élève doit reporter le double-décimètre. | <ul style="list-style-type: none"> ○ L'élève place l'extrémité de l'objet sur le début de la règle (c'est directement induit de l'expérience antérieure des élèves: utilisation de gabarit) ○ L'élève n'arrive pas à donner un résultat lorsque la mesure ne correspond pas à un nombre entier de cm ○ Erreur liée à la lecture des mm ○ L'élève peut se trouver bloqué ○ Suite à un phénomène de surcharge cognitive, l'élève peut oublier d'ajouter les longueurs obtenues par les reports successifs ou faire une erreur de calcul ○ Difficultés de manipulation |

La variable didactique est la nature du rapport entre la longueur à déterminer et les unités (cm et mm).

SAVOIR MESURER LA LONGUEUR D'UNE LIGNE BRISÉE OU LE PÉRIMÈTRE D'UNE FIGURE AVEC UN DOUBLE-DÉCIMÈTRE

| Procédures | Difficultés/erreurs |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • L'élève mesure les longueurs de chacun des segments composants la ligne brisée et additionne ces longueurs. À noter qu'il peut utiliser la multiplication sites segments sont de même longueur. | <ul style="list-style-type: none"> ○ L'élève ne perçoit pas le lien entre addition des mesures des longueurs et la longueur totale de la ligne brisée ○ Si les mesures des segments ne sont pas des nombres entiers, l'élève peut avoir des difficultés pour additionner des mesures complexes ○ Plus il y a de segments, plus il y a de risque d'oublis et d'erreurs de mesure et de calcul |

Les variables didactiques sont :

- la mesure de chaque segment (est-ce un nombre entier ou pas ?) ;
- le nombre de segments qui constituent la ligne brisée.

SAVOIR MESURER LE PÉRIMÈTRE D'UN POLYGONE PAR LE CALCUL

| Procédures | Difficultés/erreurs |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Si le polygone est un carré ou un rectangle ou un polygone régulier, à la place de la procédure qui consiste à mesurer chaque côté et à additionner les mesures, l'élève peut appliquer une formule ou utiliser un raisonnement. | <ul style="list-style-type: none"> ○ Mauvaise mémorisation de la formule ○ Confusion avec la formule de l'aire du rectangle ou du carré quand elle est connue |

Les variables, en plus de celles décrites ci-dessus, dépendent de la nature du polygone.

SAVOIR MESURER LE PÉRIMÈTRE D'UN CERCLE

Pour déterminer le périmètre d'un cercle, l'élève peut :

- soit utiliser un objet intermédiaire dépliant ;
- soit utiliser une formule.

SAVOIR COMPARER ET MESURER DES DISTANCES

En plus des difficultés évoquées ci-dessus, il y a le fait que la distance n'est pas matérialisée.

SAVOIR EFFECTUER DES CONVERSIONS D'UNITÉS DE LONGUEUR

| Procédures | Difficultés/erreurs |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Si l'unité du nombre de départ ou d'arrivée est familière et ces unités sont voisines, utilisation de la multiplication ou de la division par 10. • Si l'unité du nombre de départ ou d'arrivée est non familière et/ou ces unités ne sont pas voisines, utilisation de la multiplication ou de la division par 10, par 100 ou d'un tableau de conversion. | <ul style="list-style-type: none"> ○ Défaut de mémorisation de l'ordre des unités ○ Méconnaissance des relations entre les différentes unités ○ Si le nombre de départ ou le résultat est un nombre décimal, erreurs liées à l'écriture décimale des nombres et à la maîtrise des calculs (multiplication ou division par 10, 100...) |

Les variables dépendent de l'unité du nombre de départ ou d'arrivée et si ces unités sont voisines.

Compétences relatives aux aires

SAVOIR COMPARER ET MESURER DES AIRES DE SURFACES DONNÉES

La tâche à effectuer dépend de la forme des surfaces et de leur facilité à être incluses l'une dans l'autre.

Les surfaces ont des aires très différentes ou non

Les surfaces ont des aires très différentes ou non

| Procédures | Difficultés/erreurs |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Si les aires sont très différentes, l'élève peut effectuer cette comparaison à vue d'œil. | <ul style="list-style-type: none"> ○ L'élève assimile aire et encombrement |

Les surfaces sont faciles à inclure l'une dans l'autre

| Procédures | Difficultés/erreurs | |
|---|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Si les surfaces sont déplaçables, l'élève peut effectuer les inclusions physiquement. • Si les surfaces ne sont pas déplaçables, il doit effectuer les inclusions mentalement. | <ul style="list-style-type: none"> ○ L'élève est tenté de « fermer » les figures concaves pour comparer leur aire | La variable didactique concerne le fait de pouvoir déplacer les surfaces ou pas. |

Les surfaces peuvent être incluses l'une dans l'autre suite à des découpages/recollements

| Procédres | Difficultés/erreurs |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Si l'élève dispose de ciseaux, il fait les découpages nécessaires. • Si l'élève dispose d'un crayon et d'une règle, il représente ces transformations par des tracés. • Si l'élève ne dispose pas d'instrument, il effectue ces transformations mentalement. | <ul style="list-style-type: none"> ○ Difficulté à anticiper les tracés, découpages et recompositions nécessaires ○ Difficulté à mobiliser des images mentales |

La variable didactique concerne les instruments mis à disposition de l'élève.

Les surfaces ne peuvent pas être incluses l'une dans l'autre suite à des découpages/recollements

| Procédres | Difficultés/erreurs |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Si ces surfaces sont des figures usuelles, l'élève calcule l'aire de ces surfaces en appliquant les formules, puis il compare les nombres obtenus. • Si ces surfaces peuvent se ramener à la réunion ou au complémentaire de surfaces usuelles (ou bien par déplacement d'une partie de la figure), l'élève met en évidence ces figures usuelles, calcule les aires de chacune d'elles, puis effectue les opérations nécessaires. • Si ces surfaces ne peuvent pas se décomposer à l'aide de figures usuelles (c'est en particulier le cas des surfaces à bord curviligne autres que des secteurs circulaires), l'élève trace un quadrillage et calcule la mesure de l'aire des surfaces en utilisant comme unité un carré du quadrillage. Dans beaucoup de cas, il pourra seulement donner un encadrement de cette mesure. | <ul style="list-style-type: none"> ○ Problème de mémorisation des formules ○ Erreurs de calculs en particulier dans le cas d'utilisation de nombres décimaux ○ Difficulté au niveau de la décomposition de la figure et pour le calcul des aires des figures usuelles ○ Difficulté pour tracer le quadrillage ○ Difficulté pour dénombrer les carrés dans la mesure où les lignes du quadrillage ne correspondent pas au contour de la figure. |

La variable didactique concerne la nature de la surface.

DIFFICULTÉ PARTICULIÈRE POUR LA COMPARAISON DES AIRES

Les élèves ont souvent tendance à utiliser le théorème en acte suivant : « De deux aires, la plus grande est celle qui a le plus grand périmètre ». Ce théorème en acte est très naturel, c'est un obstacle épistémologique. D'une façon très générale, on a tous tendance à penser que les grandeurs associées à un même objet varient dans le même sens car c'est souvent le cas.

SAVOIR EFFECTUER DES CONVERSIONS D'UNITÉS D'AIRES

| Procédures | Difficultés/erreurs |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Si l'unité du nombre de départ ou d'arrivée est familière et ces unités sont voisines, utilisation de la multiplication ou de la division par 100. • Si l'unité du nombre de départ ou d'arrivée est ou non familière et/ou ces unités ne sont pas voisines, utilisation de la multiplication ou de la division par 100, par 10 000. • Utilisation d'un tableau de conversion. | <ul style="list-style-type: none"> ○ L'élève utilise les techniques de conversion qu'il connaît pour les unités de longueur ○ L'élève a des difficultés avec les calculs dans l'ensemble des nombres décimaux ○ L'élève a des difficultés de mémorisation de l'ordre des unités ○ L'élève peut rencontrer des difficultés pour placer les nombres et la virgule des nombres (si ce ne sont pas des entiers) dans le tableau, du fait qu'il y a deux colonnes par unités |

Les variables dépendent de l'unité du nombre de départ ou d'arrivée et si ces unités sont voisines.

Compétences relatives à d'autres grandeurs

COMPÉTENCES RELATIVES AUX MASSES

Savoir comparer des masses sans recours à des mesures

L'élève peut :

- « soupeser » les masses si elles sont très différentes (cette procédure est développée dès l'école maternelle) ;
- utiliser une balance de type Roberval et savoir que l'objet qui a la plus grande masse est celui qui est sur le plateau le plus « bas ».

Savoir mesurer la masse d'objets à l'aide d'une balance

L'élève peut :

- utiliser une bande de type Roberval avec des poids: les résultats seront présentés sous forme d'unités complexes (2kg250g) ou à l'aide de nombres décimaux (2,250kg - cette présentation sera utilisée en CM2 après l'introduction des nombres décimaux) ;
- utiliser une balance de ménage à lecture directe: l'élève peut aussi utiliser une balance de ménage où le poids est directement affiché sur la balance.

Savoir effectuer des conversions d'unités de masse

Ce sont les mêmes compétences que pour les conversions d'unités de longueur.

Savoir résoudre des problèmes avec des unités de masse

Il peut s'agir de problèmes de comparaison ou de problèmes qui mobilisent l'addition, la soustraction ou la multiplication par un entier

COMPÉTENCES RELATIVES AUX CAPACITÉS DE VOLUME

Savoir comparer des capacités/volumes sans recours à des mesures

L'élève peut :

- utiliser la comparaison à vue d'œil si les capacités sont très différentes. La validation se fera par le recours au transvasement de liquide ;
- utiliser le transvasement pour comparer des capacités ;
- comparer les masses des solides dans le cas de solides homogènes.

Une difficulté apparaît très rapidement : les élèves ont tendance à se focaliser sur l'une des dimensions du récipient pour comparer leur capacité (hauteur par exemple).

C'est à rapprocher des problèmes de conservation de substance mis en évidence par Piaget à travers l'expérience suivante :

- 1ère étape : On présente deux récipients cylindriques identiques en verre contenant la même quantité de liquide. On met côte à côte ces deux récipients (ce qui permet à l'élève de constater que les liquides arrivent au même niveau) et on leur demande s'il y a autant de liquide dans un récipient que dans l'autre. Les élèves répondent correctement.
- 2ème étape : Devant les élèves on verse le liquide de l'un des récipients dans un autre récipient cylindrique de rayon de base plus grand. Puis on

demande aux élèves s'il y a autant de liquide dans un récipient que dans l'autre.

Beaucoup d'élèves avant 9 ans pensent qu'il y a moins de liquide dans un nouveau récipient car le liquide arrive « moins haut ».

On dit que ces élèves n'ont pas atteint l'étape de la conservation de la substance.

Savoir mesurer la capacité d'un récipient en utilisant un liquide et un verre gradué

Les résultats seront présentés sous formes d'unités complexes (1L25cl) ou à l'aide de nombres décimaux (1,25L - cette présentation sera utilisée en CM2 après l'introduction des nombres décimaux).

Savoir mesurer un volume en le remplissant avec un volume unité

ex : un pavé droit rempli avec des cubes identiques

Savoir mesurer le volume d'un pavé droit en utilisant une formule

C'est la seule formule que les élèves sont censés utiliser à l'école.

Savoir effectuer des conversions d'unités de contenance

Ce sont les mêmes compétences que pour les conversions d'unités de longueur.

COMPÉTENCES RELATIVES À LA DURÉE

La notion de durée est très abstraite pour les élèves. Il en est en particulier très difficile d'estimer une durée, de comparer des durées sans instrument car des éléments psychologiques interviennent (chacun sait que le temps « passe très lentement » quand on s'ennuie par exemple).

L'élève doit d'autre part faire la distinction entre l'horaire (il est 15h40min) et la durée (il s'est écoulé 15h40min entre ces deux événements) qui s'expriment avec la même unité.

Savoir lire l'heure en heures et minutes à partir d'un affichage à aiguilles

Cela permet de donner du sens aux égalités : $1h=60min$ et $1min=60s$.

Savoir convertir des unités de durée

On demande souvent de convertir une durée en heures et minutes et inversement.

Savoir résoudre des problèmes liant horaires et durées

Il existe 2 types de problèmes principaux :

- on donne l'heure du début d'un événement et sa durée, puis on demande l'heure de sa fin ;
- on donne la durée d'un événement connaissant l'heure de début (respectivement de fin) de cet événement, puis demande l'heure de fin (respectivement de début).

Savoir résoudre des problèmes utilisant des calculs sur des durées

Pour l'addition, la soustraction de durées et multiplication d'une durée par un nombre entier, on retrouve les mêmes procédures et erreurs que ci-dessus.

COMPÉTENCES RELATIVES AUX ANGLES

La mesure des angles n'est pas abordée à l'école primaire.

Comparer des angles sans avoir recours à leur mesure

Cette comparaison est source de difficulté.

Pour comparer des angles, les élèves de l'école primaire peuvent utiliser le papier calque ou un gabarit. La comparaison des angles peut porter sur des angles de polygones. Dans ce cas, les élèves doivent isoler les angles dans la figure. Cela revient à comprendre que l'angle d'un polygone est défini par un sommet de ce polygone et les deux côtés de ce polygone ayant ce sommet en commun. Il faut donc « effacer » le reste du polygone. Cette connaissance, qui n'est pas naturelle, est insensée à acquérir pour pouvoir reproduire des polygones.

Reproduire un angle

Pour cela les élèves peuvent utiliser un gabarit ou le papier calque.

TRAME ORALE

Les grandeurs et mesures sont enseignées du cycle 1 au cycle 4. Elles font l'objet d'un thème d'étude spécifique des programmes de mathématiques pendant toute la scolarité obligatoire. L'école a ainsi pour objectif de faire passer de la grandeur perçue à la grandeur mesurée.