La proportionnalité

▸ L’enseignement de la proportionnalité s’inscrit dans le cadre plus général de l’apprentissage du calcul et de l’organisation et de la gestion de données. En particulier, il ne peut pas être séparé du domaine multiplicatif.

▸ Les compétences à acquérir concernent principalement la révolution de problèmes, avec deux objectifs :
- reconnaître si une situation peut être mathématisée au moyen de la proportionnalité ;
- être capable de mettre en œuvre un mode de résolution adapté, en choisissant la méthode la plus appropriée compte tenu des données en jeu.

▸ La proportionnalité peut être envisagée dans 3 cadres différents :
• Le cadre des grandeurs où les nombres expriment des quantités ou des mesures.

• Le cadre numérique où les nombres sont manipulés de manière abstraite, en référence uniquement à des propriétés connues relatives aux suites proportionnelles ou à la fonction linéaire.

• Le cadre graphique où des représentations graphiques sont utilisées. À l’école primaire, la proportionnalité n’est travaillée que dans le premier cadre

Typologie des situations servant de support à des problèmes relevant de la proportionnalité

SITUATIONS OÙ LA PROPORTIONNALITÉ INTERVIENT PAR CONVENTION SOCIALE

Il s’agit le plus souvent de problèmes de la vie courante.

→ Exemples : Le prix de la viande est souvent proportionnel à la masse achetée, le prix de l’essence est quant à lui proportionnel à la quantité achetée.

Les élèves peuvent où non connaître la convention tenue qui, de plus, n’est souvent vérifiée que dans certaines limites. Pour ce type de situations où la proportionnalité résulte d’une convention sociale, ou bien les élèves sont préalablement informés (situations familières), ou bien le fait que la proportionnalité a été retenue doit être annoncé explicitement dans l’énoncé.

SITUATIONS OÙ LA PROPORTIONNALITÉ PERMET UNE MODÉLISATION D’UN PHÉNOMÈNE

C’est le recours à l’expérimentation ou l’utilisation de théorèmes qui permettent de mettre en évidence les éventuelles relations de proportionnalité (en physique, en géométrie…)

SITUATIONS OÙ LA PROPORTIONNALITÉ INTERVIENT COMME OUTIL POUR DÉFINIR DE NOUVEAUX CONCEPTS

La proportionnalité est alors utilisée pour produire de nouvelles notions: agrandissement ou réduction d’objets géométriques, échelle, pourcentage, vitesse moyenne… ces notions font l’objet de premiers travaux à l’école primaire. Elles sont plus difficiles car elles ne « préexistent pas » à la proportionnalité, mais sont construites en faisant une hypothèse de proportionnalité qui est rarement vérifiée dans la réalité.

Typologie des problèmes concernant la proportionnalité
LES PROBLÈMES DE QUATRIÈME PROPORTIONNELLE

Dans ces problèmes, on est amené à chercher le nombre manquant dans une relation qui met en jeu deux couples de nombres.

Grandeur A	Grandeur B
a	b
?	c

Ce type de problème peut concerner :

Des grandeurs A et B de même nature (distances dans la réalité / distances sur le papier)

Des grandeurs A et B de nature différente (distances en km / durée en heures)

LES PROBLÈMES DE COMPARAISON DE MÉLANGES

Dans ces problèmes interviennent en général au moins 3 quantités : le « tout » et au moins deux parties complémentaires.
On peut être amené à déterminer :

- Une partie par rapport au tout
- Une partie par rapport à l'autre partie

AUTRES TYPES DE PROBLÈMES

D'autres types de problèmes peuvent être envisagés, mais ils relèvent plutôt d'un travail au collège même si dans des situations simples ils peuvent être proposés, comme problème de recherche, à des élèves de l'école primaire.

Les problèmes de double proportionnalité

Ils interviennent dans le cas d'une grandeur proportionnelle à deux autres grandeurs qui peuvent être modifiées de manière indépendante.

Les problèmes de proportionnalité simple

Ils interviennent dans le cas d'une grandeur qui varie proportionnellement à une autre qui varie, elle-même, proportionnellement à une troisième.

Procédures de résolution utilisables par les élèves

Elles sont très variées. Pour l'école primaire, 3 types de procédures peuvent être enseignées :

Pour faire une mousse au chocolat, Louis a trouvé une recette qui permet de faire 4 coupes. Il faut : 2 oeufs, 100g de chocolat, 30g de sucre. Calcule les quantités de chacun des ingrédients pour faire 10 coupes.

PROCÉDURES EN APPUI SUR LES PROPRIÉTÉS DE LA LINÉARITÉ

En appui sur la seule propriété multiplicative de la linéarité

Elle revient à considérer que 10 coupes « c'est 2,5 fois plus de coupes que 4 coupes » et donc qu'il faut prendre 2,5 fois plus de chaque quantité d'ingrédients.

x 2,5

Nombre de coupes	4	10
Quantité de sucre (en g)	30	75

2,5 est appelé « rapport de linéarité » ou « rapport scalaire »

Cette procédure est difficile à envisager à l'école primaire du fait que le rapport de linéarité fait intervenir un nombre décimal. Elle serait d'usage plus facile si on faisait en sorte qu'il soit un nombre entier.

En appui sur les propriétés additives et multiplicatives de la linéarité

Elle revient à considérer que 10 coupes, c'est 8 coupes (deux fois 4 coupes), plus 2 coupes (la moitié de 4 coupes).

: 2

x 2

Nombre de coupes	4	8	2	10=8+2
Quantité de chocolat (en g)	100	200	50	250=200+50

PROCÉDURES EN APPUI SUR LE PASSAGE PAR L'IMAGE DE L'UNITÉ

Ces procédures, appelées aussi « règle de trois », s'appuient sur la propriété multiplicative de linéarité mise en oeuvre en cherchant les quantités nécessaires pour une coupe, ce qui permet ensuite d'avoir la réponse pour n'importe quel nombre de coupes.

$4 \xrightarrow{:4} 1 \xrightarrow{\times 10} 10$

Nombre de coupes	4	1	10
Quantité de chocolat (en g)	100	25	250

Cette procédure n'est efficace que si le passage par l'image de l'unité s'effectue au moyen de calculs familiers aux élèves.

PROCÉDURES EN APPUI SUR LE COEFFICIENT DE PROPORTIONNALITÉ

Cette procédure résulte d'un raisonnement souvent moins « naturel » que celui qui sous-tend les procédures précédentes. Il revient par exemple à considérer qu'il faut deux fois moins d'oeufs que de coupes. Le coefficient de proportionnalité entre le nombre de coupes et le nombre d'oeufs est donc « 2 ».

Nombre de coupes	4	10
Nombre d'oeufs	2	5

$\downarrow : 2$

Cette procédure est plus « naturelle » lorsque les deux grandeurs sont de même nature et exprimées avec la même unité.

Variables didactiques

RELATIONS ENTRE LES GRANDEURS EN JEU

Le coefficient de proportionnalité entre les grandeurs en jeu.

Il peut ou non être choisi pour favoriser le recours aux procédures qui s'appuient sur son identification : nombre entier simple, nombre décimal simple ou non, nombre fractionnaire…

Les rapport de linéarité entre nombres relevant d'une même grandeur

Ces rapports peuvent également être ou non choisis pour favoriser le recours aux procédures de type « linéarité » : nombre entier simple, nombre décimal simple ou non, nombre fractionnaire… De même, les relations entre les nombres relevant d'une même grandeur peuvent ou non faciliter l'obtention de certains nombres par combinaison linéaire.

NOMBRES DE COUPLES DONNÉS

Ce nombre peut favoriser la multiplicité des combinaisons linéaires pour obtenir un nombre déterminé en utilisant les propriétés de linéarité, ou bien faciliter la mise en évidence du coefficient de proportionnalité.

CONTEXTE DU PROBLÈME

Le contexte permet ou non de s'appuyer sur une simulation (dessin, schéma de la situation) au moment de la résolution et, à la fin, peut donner lieu ou non à une validation par l'expérience

Difficultés rencontrées par les élèves

DIFFICULTÉS À IDENTIFIER LES GRANDEURS EN RELATION DANS LA SITUATION PROPOSÉE

La présentation de la situation (texte, illustration, tableau…) peut influer sur cette difficulté. D'une façon générale, il est préférable que cette tâche soit le plus souvent laissée au travail des élèves, et donc que la situation ne soit pas déjà schématisée, cela doit être l'occasion pour les élèves de prendre conscience des grandeurs en relation.

DIFFICULTÉS À RECONNAÎTRE SI LA SITUATION RELÈVE DU MODÈLE PROPORTIONNEL OU NON

Certains élèves pensent à tort que toute situation où les données numériques sont organisées en tableau relève toujours de la proportionnalité. C'est généralement le cas pour toute situation dans laquelle il y a trois nombres dans l'énoncé et qu'on en demande un quatrième.

DIFFICULTÉS DANS DES SITUATIONS DE PROPORTIONNALITÉ DE TYPE « AUGMENTATION » OU « DIMINUTION »

Il s'agit, par exemple, de situations dans lesquelles on passe d'une première à une deuxième grandeur comme c'est le cas dans des situations d'agrandissement ou de réduction de figures. Pour de nombreux élèves, les idées d'augmentation et de diminution sont liées aux notions d'addition et de soustraction, ce qui constitue un obstacle à la reconnaissance du modèle proportionnel qui, pour plusieurs types de procédures, nécessite le recours à la multiplication ou à la division. Pour évoquer ce type de difficulté, on parle souvent d'obstacle « additif ».

DIFFICULTÉS POUR CHOISIR UNE PROCÉDURE DE RÉSOLUTION

Il faut pour cela être capable de mettre en évidence rapidement les relations qui existent entre les nombres donnés dans l'énoncé: à cet égard, les compétences en calcul mental jouent un rôle décisif. Les domaines numériques dans lesquels sont choisis les nombres de l'énoncé et les relations entre ces nombres jouent un rôle déterminant dans le choix d'une procédure: ce sont des variables didactiques décisives. Il appartient à l'enseignant d'en déterminer les valeurs avec soin pour favoriser, chez les élèves, le recours à tel ou tel type de procédure.

DIFFICULTÉS LIÉES À LA MISE EN OEUVRE DE LA PROCÉDURE CHOISIE

DIFFICULTÉS DANS L'EXÉCUTION DES CALCULS